

Fundamentos de Otimização

Tiago de Moraes Montanher

IME-USP

Agenda

- Problema Ecológico.
- Introdução a Otimização.
- Métodos de Otimização.
- Outras Tópicos em Otimização.
- Referências Bibliográficas.

- Desejamos saber o número médio de indivíduos que frequentam um reservatório de água.
- Durante 5 dias anotamos o número de indivíduos que visitam o reservatório.
- Sabemos que o número de indivíduos visitando o reservatório segue a distribuição de POISSON com parâmetro λ .
- λ é o número esperado de indivíduos visitando o reservatório.

- **LEMBRETE:**

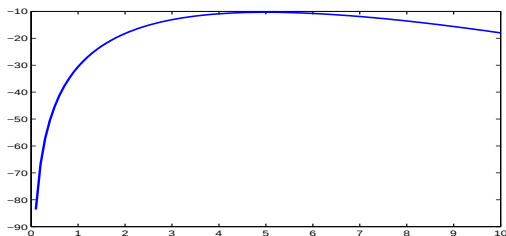
$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- Dados Observados:

dia	1	2	3	4	5
# indivíduos	4	7	2	6	6

- Função de log-verossimilhança:

$$L(\lambda, k) = -n\lambda + \log(\lambda) \sum_{i=1}^n k_i - \sum_{i=1}^n \log(k_i!)$$

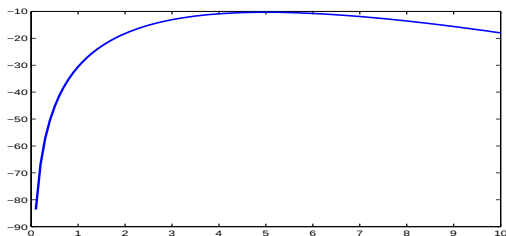


- Dados Observados:

dia	1	2	3	4	5
# indivíduos	4	7	2	6	6

- Função de log-verossimilhança:

$$L(\lambda, k) = -n\lambda + \log(\lambda) \sum_{i=1}^n k_i - \sum_{i=1}^n \log(k_i!)$$



- Queremos encontrar o maior valor da função!

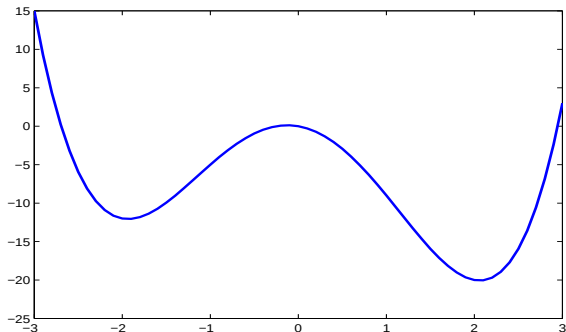
O que é Otimização?

O que é Otimização?

- **WIKIPEDIA:** Estudo de Problemas em que se busca **Minimizar** uma função.

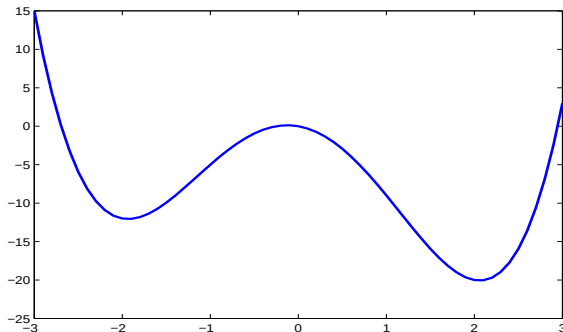
O que é Otimização?

- **WIKIPEDIA:** Estudo de Problemas em que se busca **Minimizar** uma função.



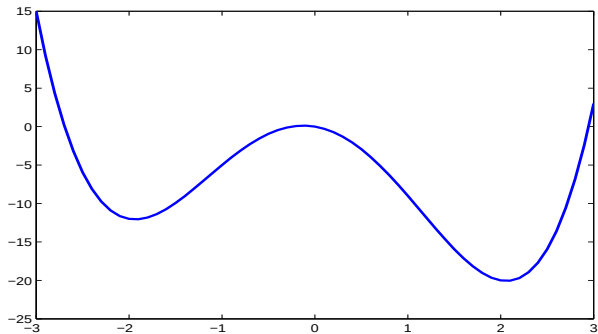
O que é Otimização?

- **WIKIPEDIA:** Estudo de Problemas em que se busca **Minimizar** uma função.

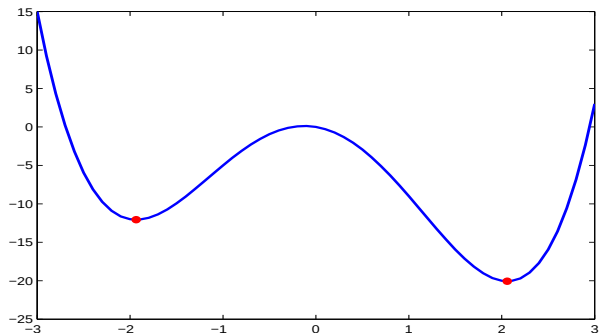


- O que é **Minimizar** uma função?

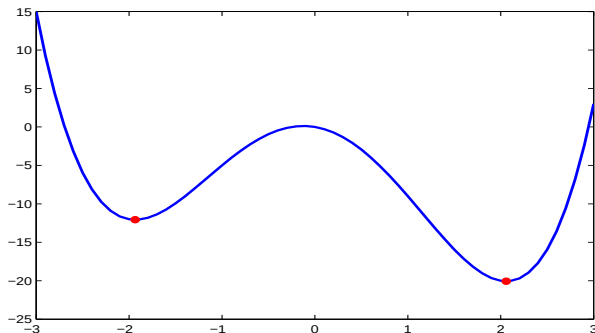
Mínimos Locais e Globais



Mínimos Locais

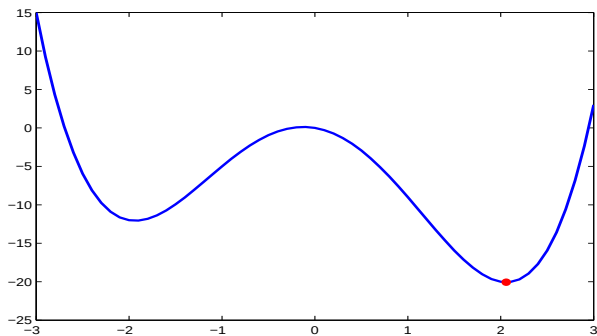


Mínimos Locais

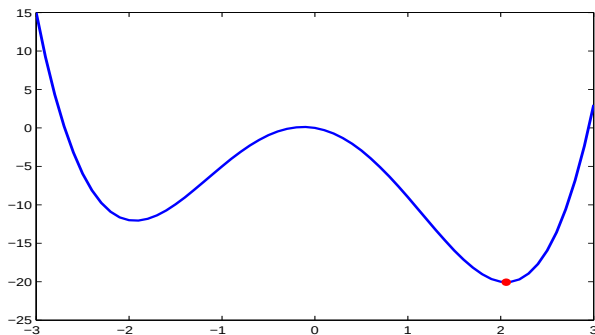


- Um ponto é mínimo local se qualquer outro próximo a ele tem valor de função maior.

Mínimos Globais



Mínimos Globais



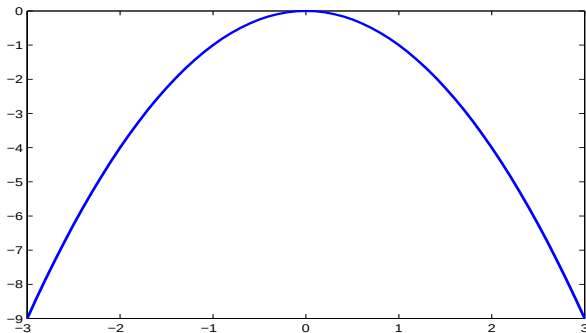
- **TODO** mínimo global é também local mas nem todo mínimo local é Global.

Existência de Mínimos

- **Pergunta:** Todo problema de otimização tem solução?

Existência de Mínimos

- **Pergunta:** Todo problema de otimização tem solução?
- **Resposta:** Não! A função $f(x) = -x^2$ não tem mínimos.

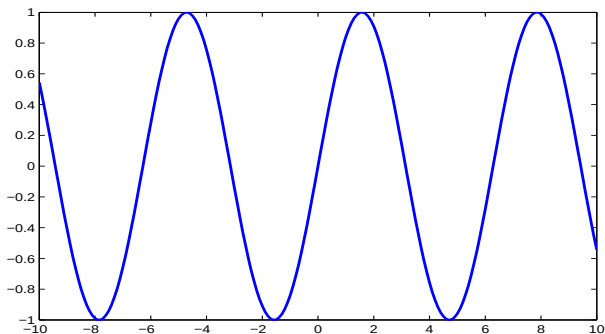


Unicidade de Mínimos

- **Pergunta:** Se um problema de otimização tem solução, ela é única?

Unicidade de Mínimos

- **Pergunta:** Se um problema de otimização tem solução, ela é única?
- **Resposta:** Não! A função $f(x) = \sin(x)$ tem muitos mínimos.



- E todos eles são GLOBAIS!

Formulação e Nomenclatura

- **O PROBLEMA:**

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{l} \leq x \leq \mathbf{u} \end{aligned}$$

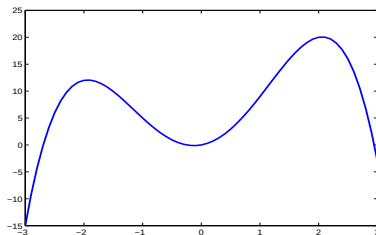
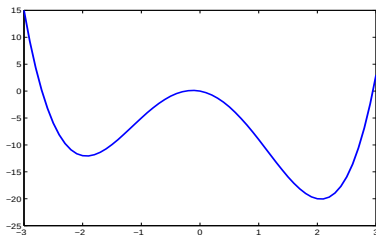
- A função f é conhecida como **função objetivo**.
- As desigualdades $\mathbf{l} \leq x \leq \mathbf{u}$ são conhecidas como **restrições**
- Se omitirmos as desigualdades $\mathbf{l} \leq x \leq \mathbf{u}$ chamamos nosso problema de **irrestrito**.
- Existem outras restrições além de $\mathbf{l} \leq x \leq \mathbf{u}$. Nesta apresentação não entramos em detalhes sobre estas restrições.

Mínimos e Máximos

- **Pergunta:** Se desejamos encontrar o máximo de uma função ao invés do mínimo?

Mínimos e Máximos

- **Pergunta:** Se desejamos encontrar o máximo de uma função ao invés do mínimo?
- **Resposta:** Devemos então minimizar $-f(x)$.
- **Exemplo:**



Métodos de Otimização

Métodos de Otimização

- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização no olho.

Métodos de Otimização

- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização no olho.
- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização com papel e lapis.

Métodos de Otimização

- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização no olho.
- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização com papel e lapis.
- Na maioria das vezes usamos computadores para resolver problemas de otimização.

Métodos de Otimização

- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização no olho.
- Em geral não conseguimos resolver problemas de otimização com papel e lapis.
- Na maioria das vezes usamos computadores para resolver problemas de otimização.
- Existem muitos métodos de otimização no mercado. Qual devemos escolher?

Critérios de Escolha

Critérios de Escolha

- Quais informações eu tenho sobre o problema?

Critérios de Escolha

- Quais informações eu tenho sobre o problema?
- Meu problema tem restrições?

Crítérios de Escolha

- Quais informações eu tenho sobre o problema?
- Meu problema tem restrições?
- Que tipo de resposta eu espero receber do método?

CrITÉrios de Escolha

- Quais informações eu tenho sobre o problema?
- Meu problema tem restrições?
- Que tipo de resposta eu espero receber do método?
- Estou disposto a esperar pela resposta?

Critérios de Escolha

- Quais informações eu tenho sobre o problema?
- Meu problema tem restrições?
- Que tipo de resposta eu espero receber do método?
- Estou disposto a esperar pela resposta?
- Qual meu método preferido?

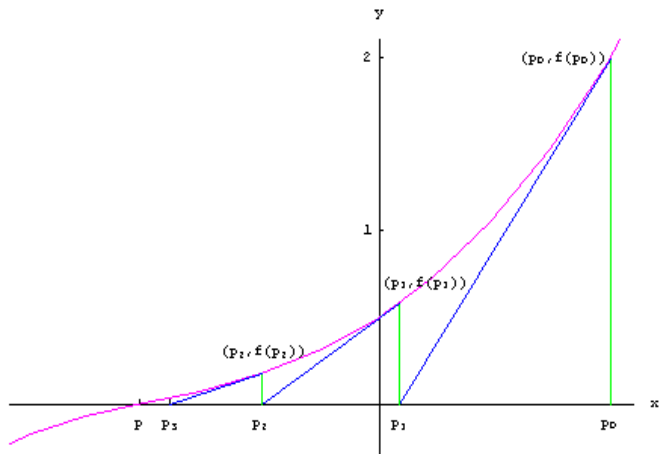
Método de Newton

Características do Método

- Requer a função f .
- Requer a derivada de f .
- Requer um ponto inicial.
- Muito rápido dependendo da escolha do ponto inicial.
- Muito usado em muitos pacotes de otimização.



Idéia do método de newton



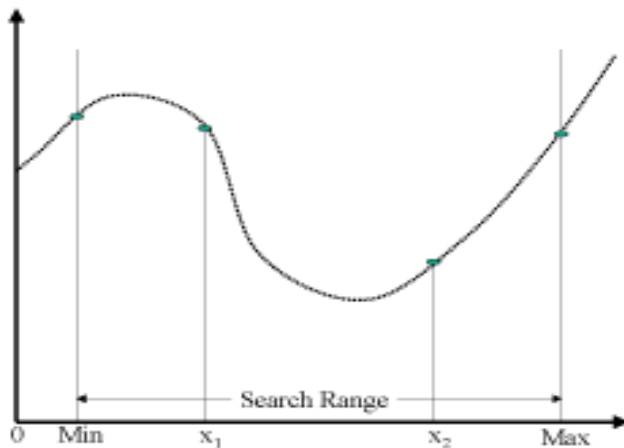
Métodos Livres de Derivada

Característica do Método

- Não requer a derivada de f .
- Requer a função f .
- Não pode ser usado em problemas Irrestritos.
- Rápido em uma dimensão.
- Pode ser lento para dimensões maiores



Golden Section Search

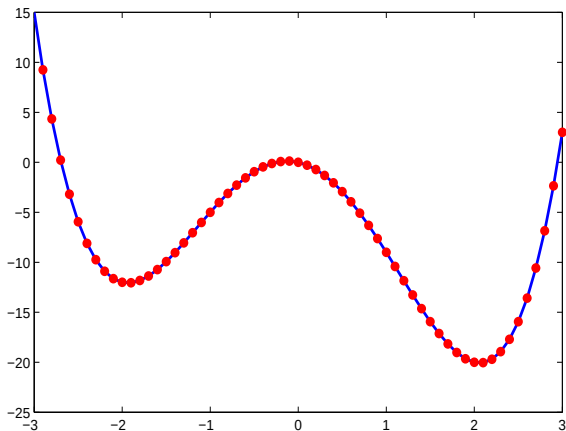


Métodos De Busca Direta

Característica do Método

- Não requer a derivada de f .
- Requer a função f .
- Não pode ser usado em problemas Irrestritos.
- Método lento. Recomendado para problemas de baixa dimensão.
- Método pouco exigente.
- Em geral pode dar melhores resultados do que métodos livres de derivadas.

Idéia dos Métodos de Busca Direta



Métodos Estocásticos

Característica do Método

- Requer a derivada de f .
- Requer a função f .
- Pode encontrar o mínimo global da função.
- Método lento. Recomendado para problemas de baixa dimensão.

Otimização no R

- **bbmle** Tools for general maximum likelihood estimation.
- **linprog** Linear Programming / Optimization.
- **mcmc** Markov Chain Monte Carlo.
- **mco** Multi criteria optimization algorithms and related functions.
- **rgeoud** R version of GENetic Optimization Using Derivatives.
- **ucminf** General-purpose unconstrained non-linear optimization.

Otimizadores na Rede

- NEOS Server for Optimization. <http://www-neos.mcs.anl.gov/>
- CPLEX. <http://www.ilog.com/products/cplex/>
- TANGO <http://www.ime.usp.br/~egbirgin/tango>

Referências Bibliográficas

- Bolker B., Ecological Models and Data in R.
- Nocedal J., Numerical Optimization
- TANGO <http://www.ime.usp.br/~egbirgin/tango>
- Tiago montanhe@gmail.com