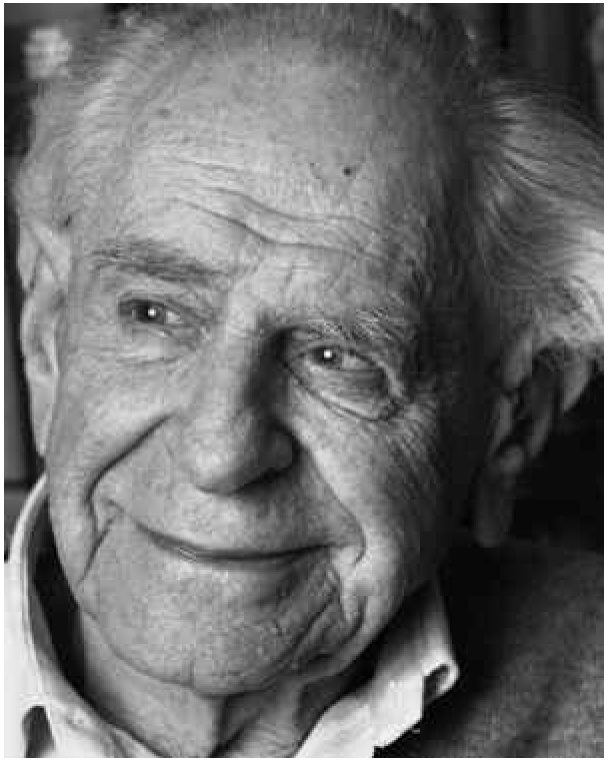
BIE5781

Aula 1

Uma Introdução à Lógica da Modelagem Estatística

Testes de Hipótese



Sir Karl Popper (1902-1994)

<u>Basta uma observação proibida por uma hipótese para refutá-la</u>

Nos aproximamos da verdade pela rejeição das hipóteses falsas.

Portanto nossa preferência por certas hipóteses tem validade lógica.

Testes x Modelos

EXAMPLE 8.1 A two-sample t test for the two-tailed hypotheses, H_0: $\mu_1 = \mu_2$ and H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ (which could also be stated as H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ and H_A: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$). The data are human blood-clotting times (in minutes) of individuals given one of two different drugs.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_A: $\mu_1 \neq \mu 2$

Given drug B	*Given drug G*
8.8	9.9
8.4	9.0
7.9	11.1
8.7	9.6
9.1	8.7
9.6	10.4
	9.5

$n_1 = 6$	$n_2 = 7$
$\nu_1 = 5$	$\nu_2 = 6$
$\bar{X}_1 = 8.75$ min	$\bar{X}_2 = 9.74$ min
$SS_1 = 1.6950\ \text{min}^2$	$SS_2 = 4.0171\ \text{min}^2$

$$s_p^2 = \frac{SS_1 + SS_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{1.6950 + 4.0171}{5 + 6} = \frac{5.7121}{11} = 0.5193\ \text{min}^2$$

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.5193}{6} + \frac{0.5193}{7}} = \sqrt{0.0866 + 0.0742}$$

$$= \sqrt{0.1608} = 0.40\ \text{min}$$

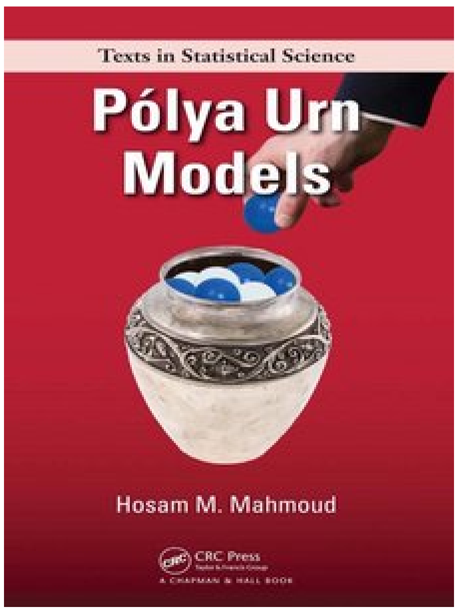
$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\bar{X} - \bar{X}_2}} = \frac{8.75 - 9.74}{0.40} = \frac{-0.99}{0.40} = -2.475$$

$$t_{0.05(2),\nu} = t_{0.05(2),11} = 2.201$$

Therefore, reject H_0.

$$0.02 < P(|t| \geq 2.475) < 0.05 \quad [P = 0.030]$$

O Que É Verossimilhança?



Observação:

um sorteio, uma bola branca.

Hipóteses

H_1: Há apenas bolas brancas na urna.

H_2: Metade das bolas da urna são brancas e metade são azuis.

Problema:

Identificar a hipótese mais plausível, **dada a observação**.

Lei da Verossimilhança
(Um Enunciado Informal)

Dado que:

- Há mais de uma explicação para um conjunto de dados.
- Cada hipótese atribui uma probabilidade diferente aos dados.

Então:

- A EXPLICAÇÃO MAIS PLAUSÍVEL SERÁ AQUELA QUE ATRIBUIR A MAIOR PROBABILIDADE AOS DADOS.

Qual a Força da Evidência?

Um sorteio, uma bola branca

$$P(x=1|H_1)=1{,}0$$
$$P(x=1|H_2)=0{,}5$$

H_1 é $\frac{1{,}0}{0{,}5}=2$ vezes mais plausível que H_2

E para observações múltiplas?

Dois sorteios, duas bolas brancas

$$P(x=2|H_1)=1,0$$

$$P(x=2|H_{۲})=۰,۵\times۰,۵=۰,۲۵$$

H_1 é $\frac{1,0}{0,25}=4$ vezes mais plausível que H_2

Função de Verossimilhança

Qualquer função proporcional
ao produto das probabilidades que
um modelo atribui a cada valor dos dados*

$$L \propto P(x_1|H) \times P(x_2|H) \times \ldots P(x_n|H)$$

* Sob a premissa de que os dados são realizações independentes de um mesmo processo.

RESUMINDO ...

SE:

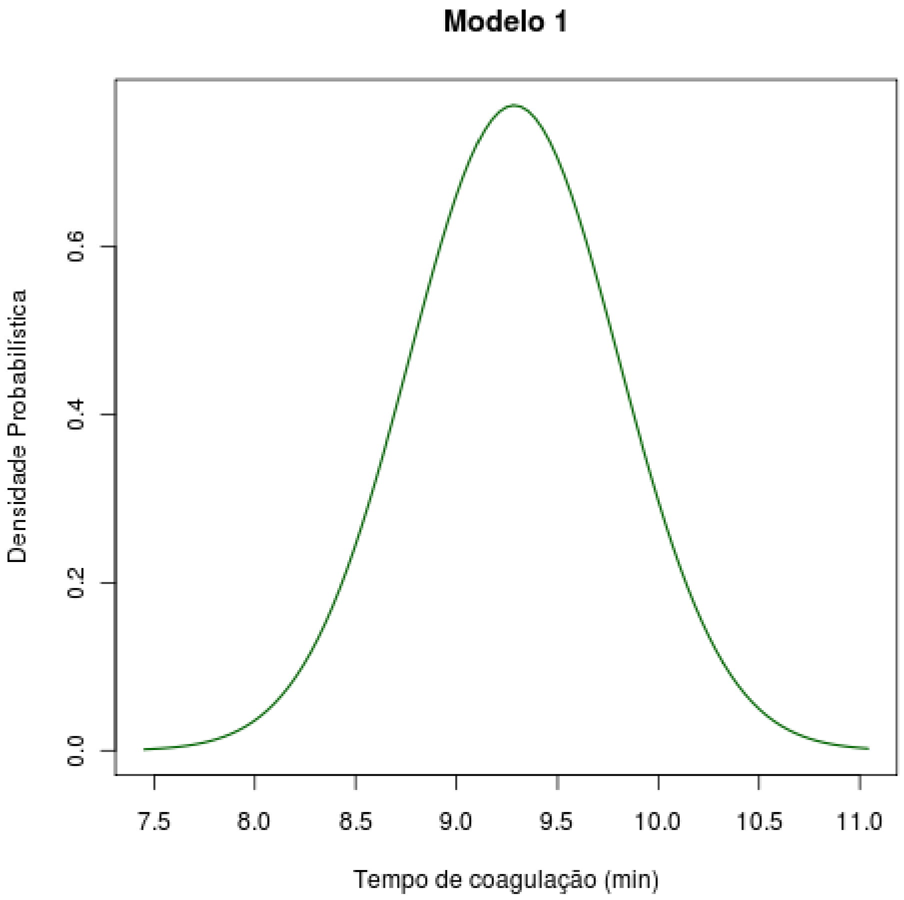
Temos dados que podem ser explicados por mais de uma hipótese, e

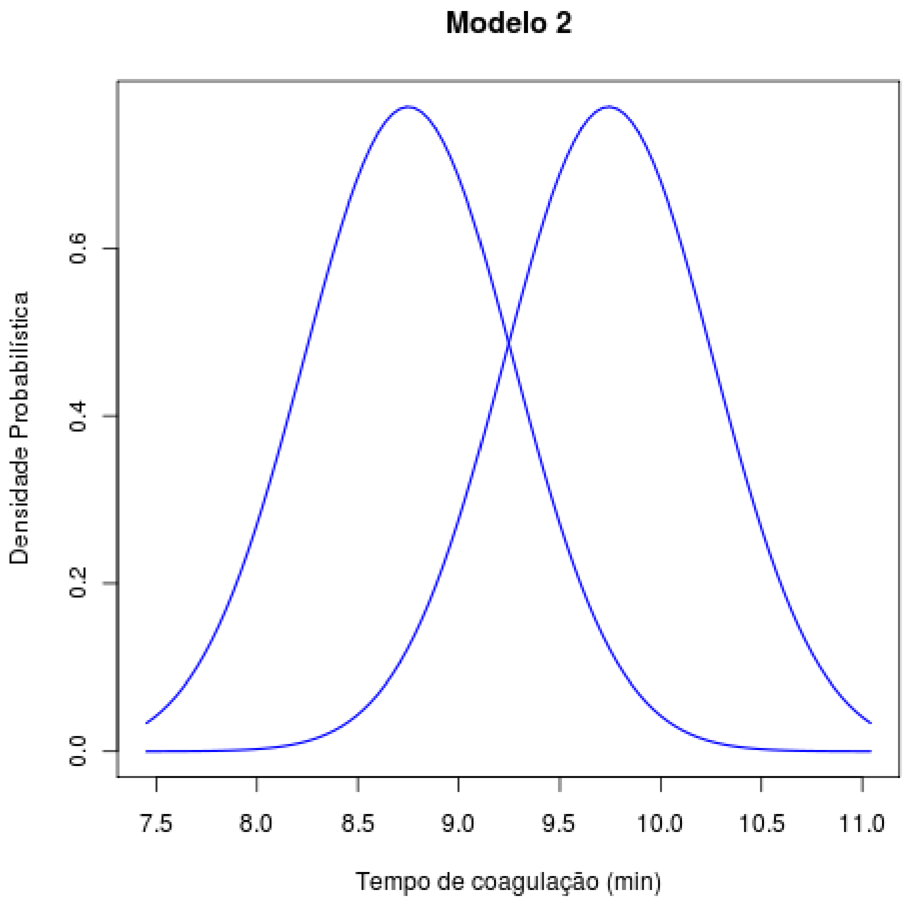
Cada hipótese é um modelo que atribui alguma probabilidade aos dados

ENTÃO:

Podemos expressar o quão plausível uma hipótese é <u>em relação às outras</u> por meio de uma função, chamada verossimilhança.

Modelos em um Teste t

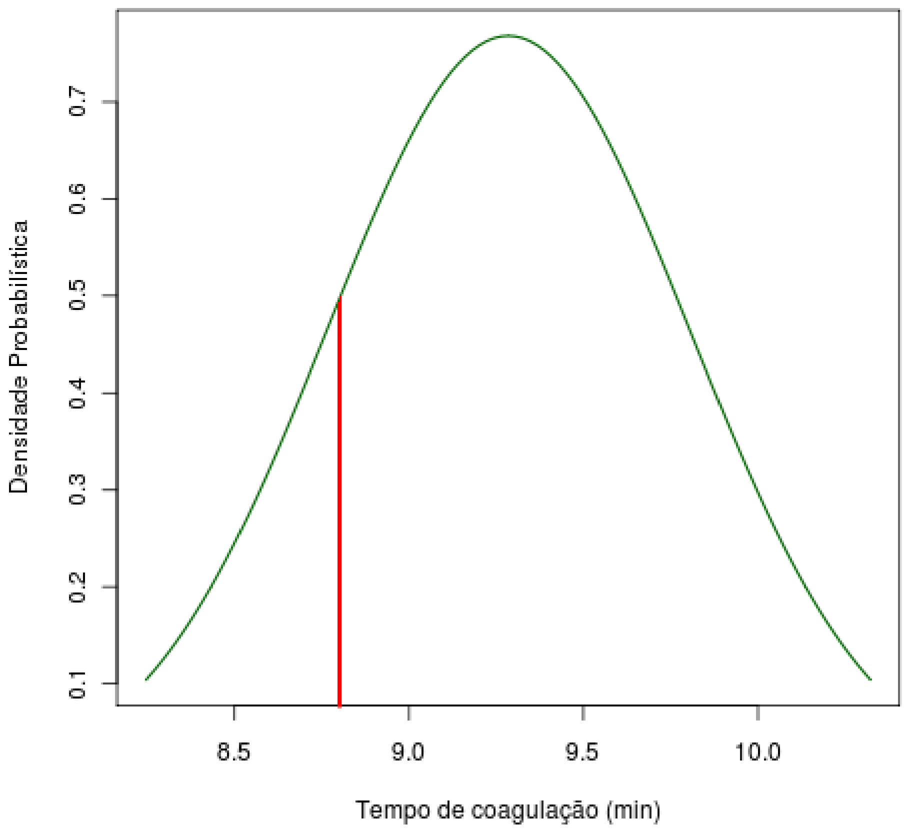




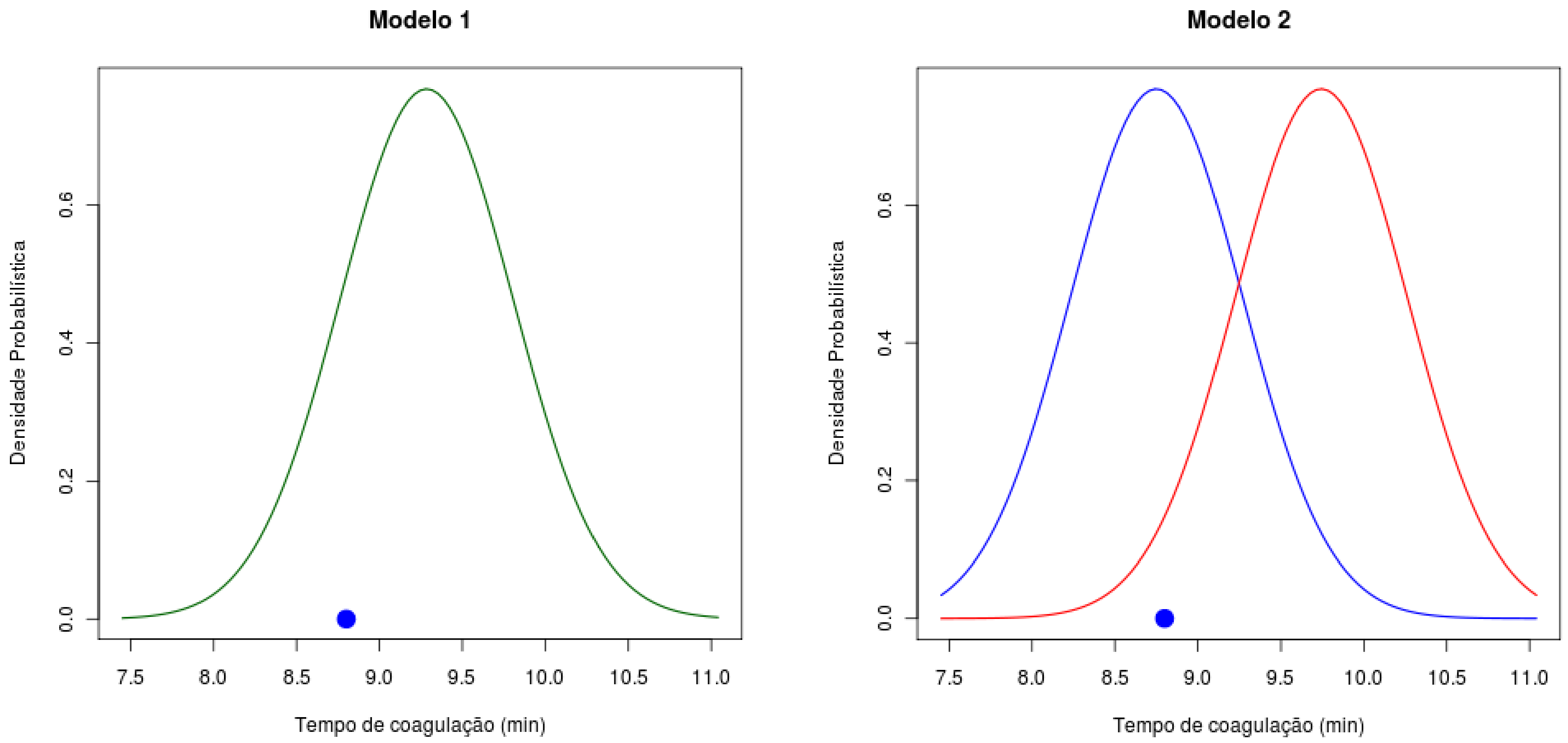
Parâmetros: μ, σ

Parâmetros: μ_1, μ_2, σ

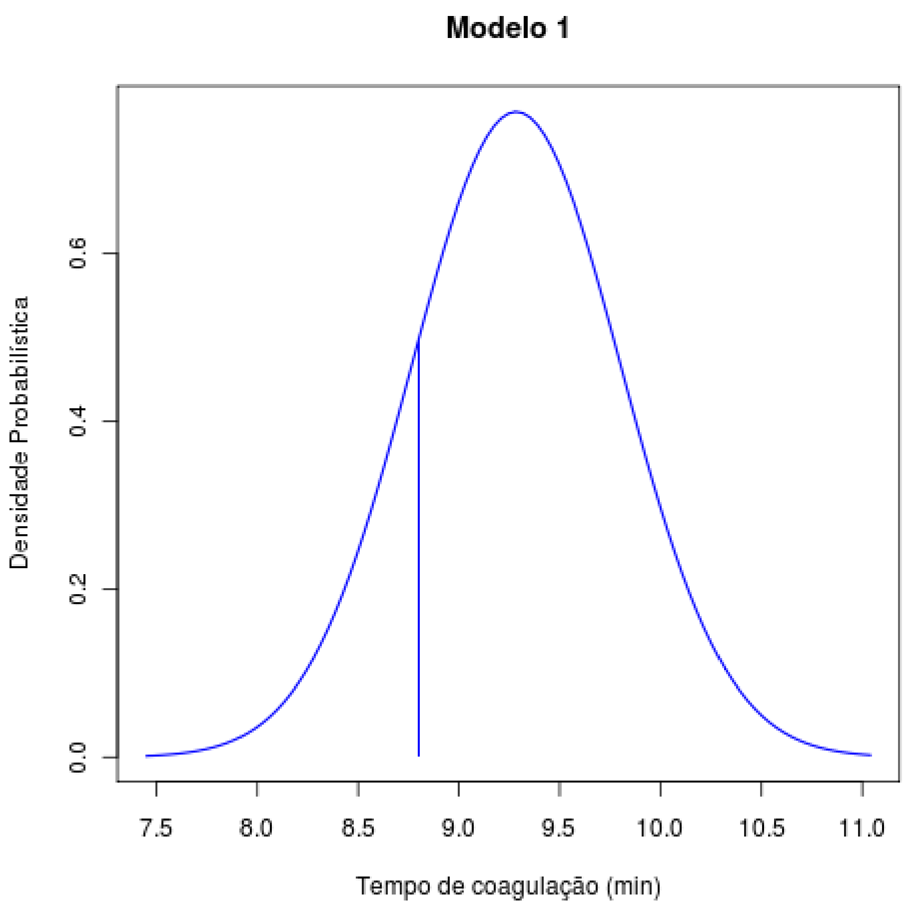
Densidade de Probabilidade

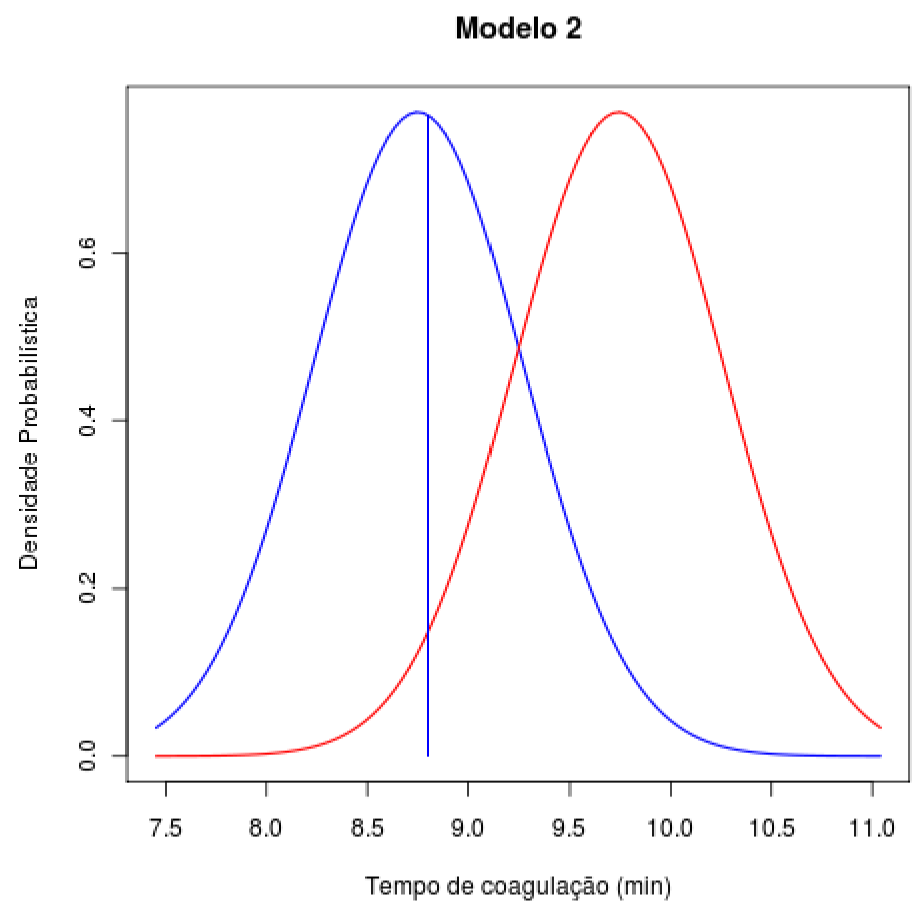


Densidade de uma Observação

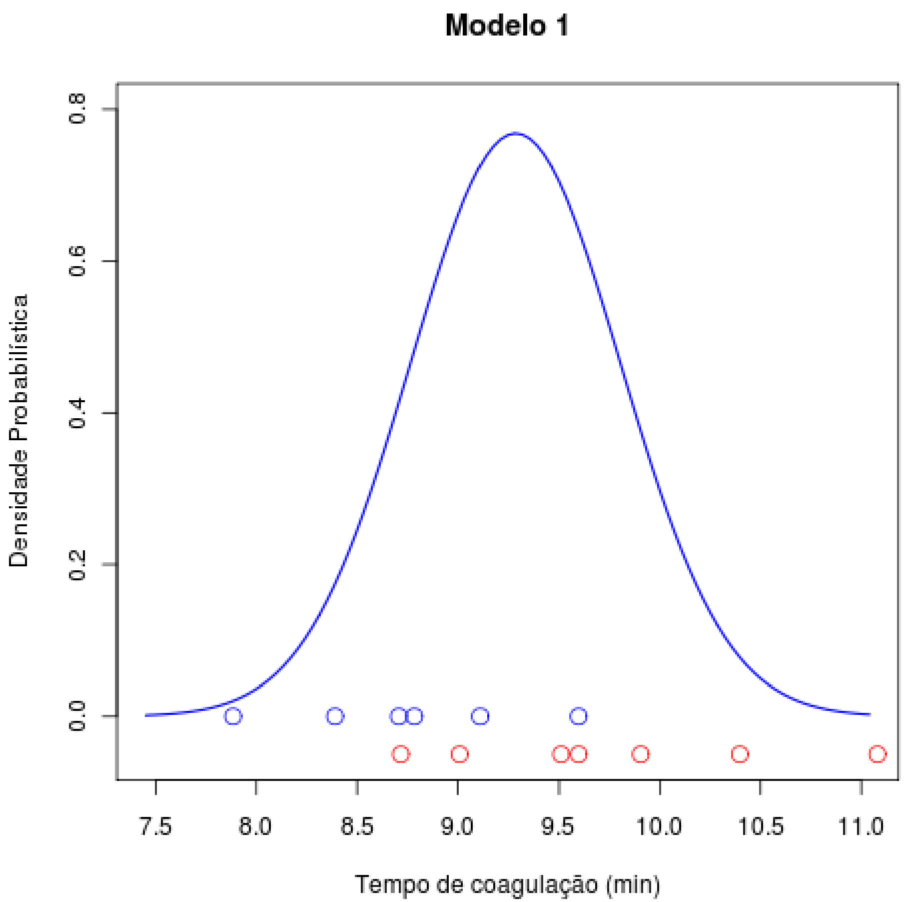


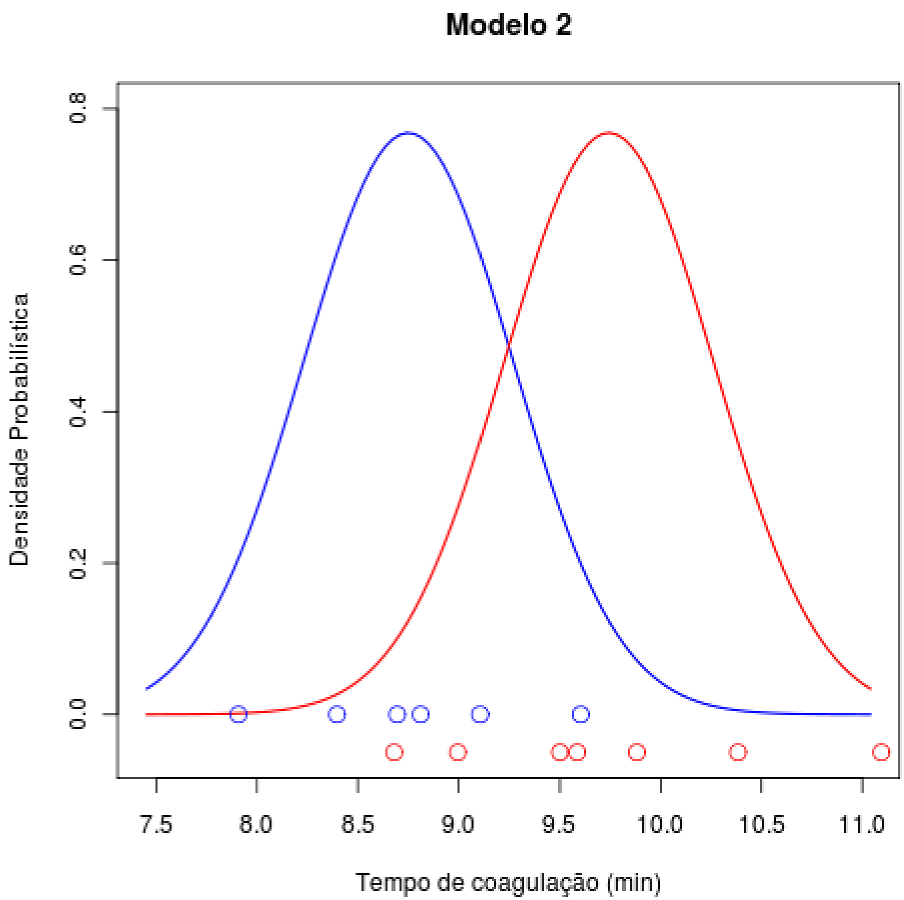
Densidade de uma Observação





Comprando os Dois Modelos

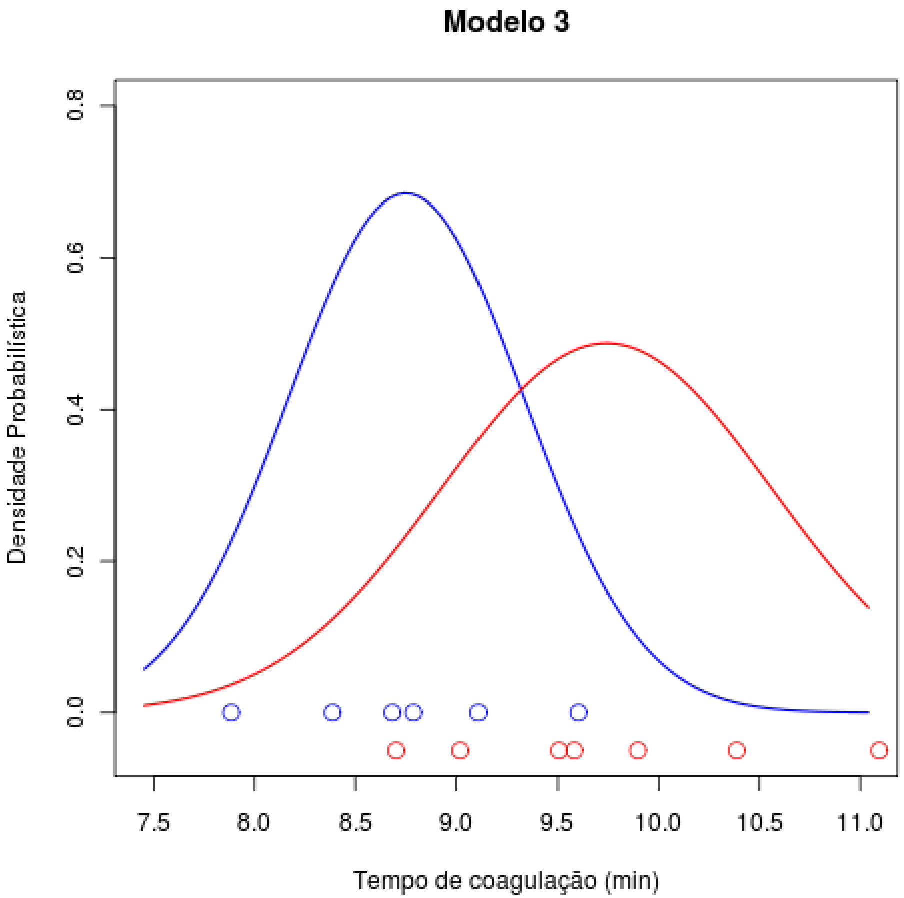


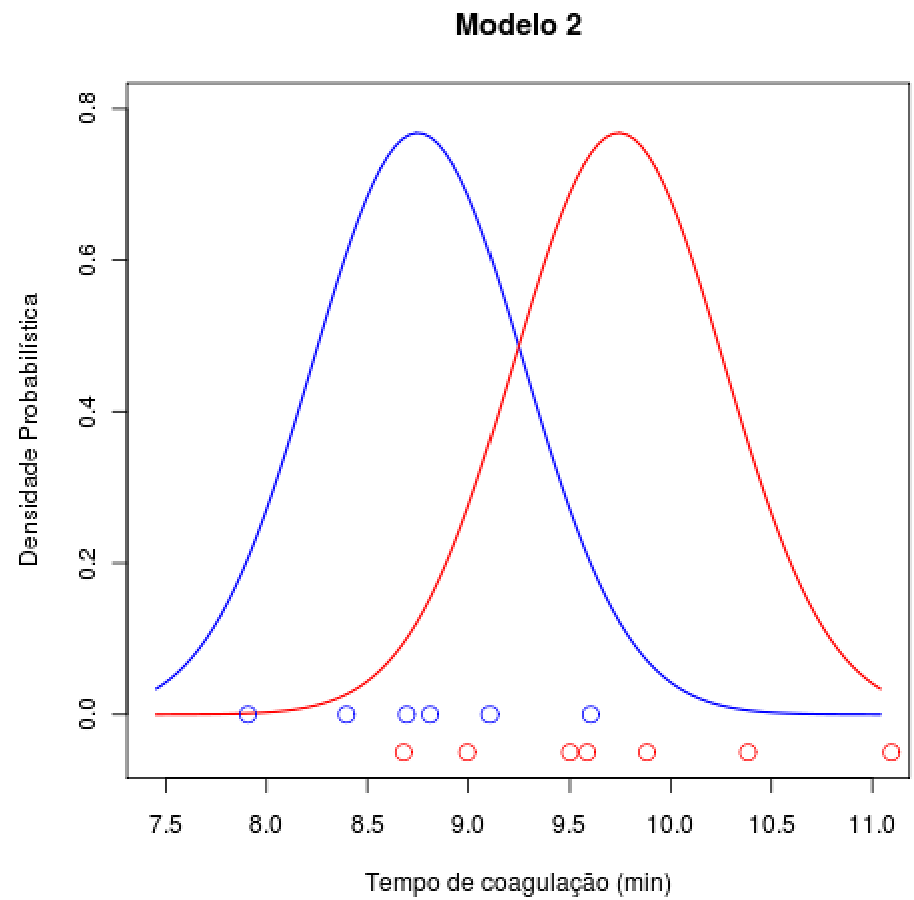


LL = -19,9

LL = -14,1

Comprando os Dois Modelos





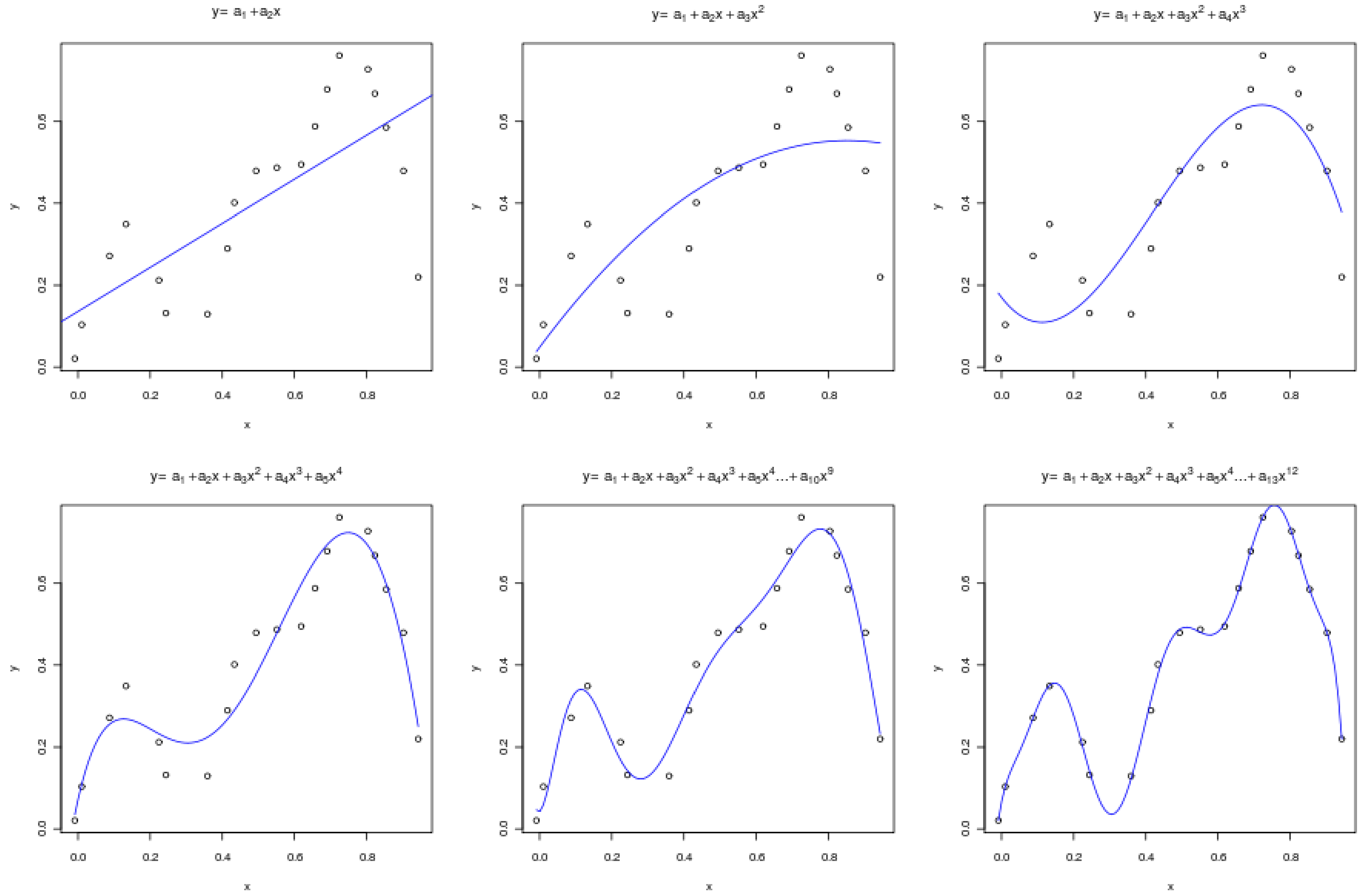
LL = -12,8

LL = -14,1

Parcimônia!

MODELO	Parâmetros	LL
H1	μ, σ	19,9
H2	μ_1, μ_2, σ	14,0
H3	$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$	12,8

Super-parametrização



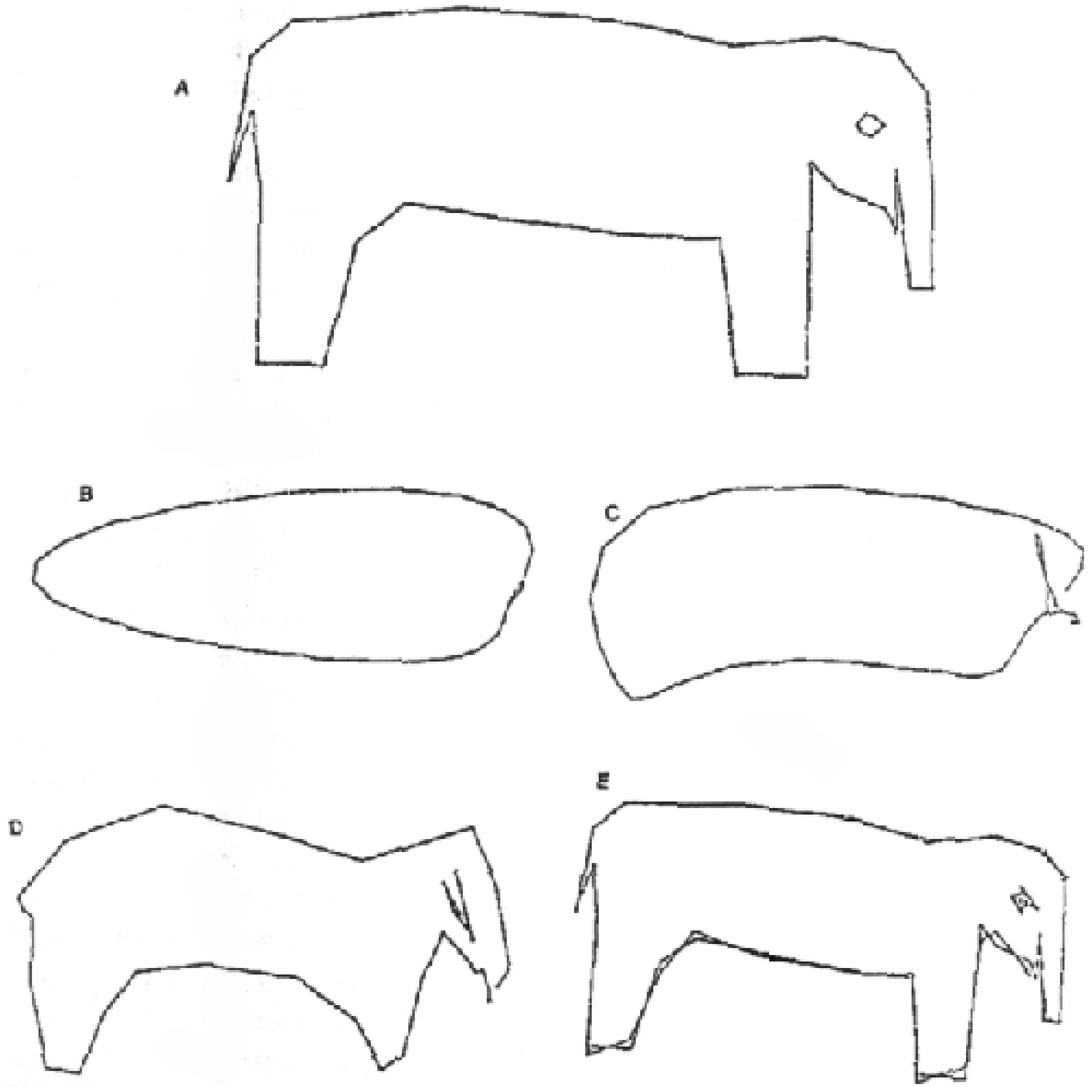


FIGURE 1.2. "How many parameters does does it take to fit an elephant?" was answered by Wel (1975). He started with an idealized drawing (A) defined by 36 points and used least squares Fourier sine series fits of the form $x(t) = \alpha_0 + \sum \alpha_i \sin(it\pi/36)$ and $y(t) = \beta_0 + \sum \beta_i \sin(it\pi/36)$ for $i = 1, \ldots, N$. He examined fits for $K = 5, 10, 20$, and 30 (shown in B–E) and stopped with the fit of a 30 term model. He concluded that the 30-term model "may not satisfy the third-grade art teacher, but would carry most chemical engineers into preliminary design."

"Me dê 5 parâmetros e ajusto um elefante"

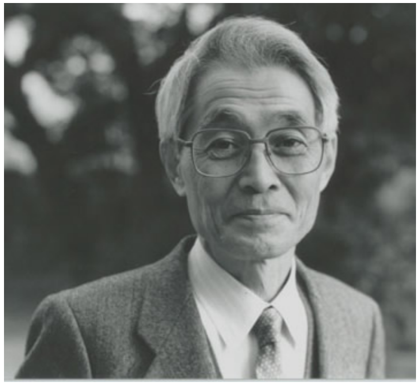
J. Von Neumann

Veja também:
J. Wei, "Least Square Fitting of an Elephant," CHEMTECH, 5(2), 1975 pp. 128–129.
http://demonstrations.wolfram.com/Fittin

AIC

AIC = - 2 x Ln(verossimilhança) + 2 x n de parâmetros

MODELO	Parâmetros	LL	AIC
H1	μ, σ	-19,9	43,8
H2	μ_1, μ_2, σ	-14,0	34,0
H3	μ_1, μ_2, σ_1, σ_2	-12,8	33,6



Hirotsugu Akaike (1927)

RESUMO

Modelos estatísticos: descrevem a probabilidade de que sua variável assuma um certo valor.

Os modelos diferem quanto aos seus parâmetros.

Uma vez obtidos os dados, cada modelo terá uma verossimilhança máxima.

Usamos a verossimilhança, ou uma função dela, para identificar o(s) modelo(s) mais plausível(is).